* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+2}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = 0$$

(ζ_f) admet une branche infinie de direction parabolique celle de $(O,\vec{i})$

3) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x-1	-	-	0	+
x+1	-	0 +		+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	0 -	0	+

$D_f =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$

* $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} x.\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty} x.\left[\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right] = \lim_{x\to-\infty} x.\left[\frac{-2}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right) = -1$$

d'où Δ:y=x-1 est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$

* $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right) = -1$

Δ:y=x-1 asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

EX 15 :

1) $f(x) = x.\sin\left(\frac{2}{x}\right)$

pour $x \neq 0$ $\quad |f(x)| = |x|.\left|\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right|$

on sait que : $\left|\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right| \le 1 \Rightarrow |x|\left|\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right| \le |x|$

$\Rightarrow |f(x)| \le |x|$

$\lim_{x\to0}|x| = 0$ d'où $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

2) $f(x)=1+x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

pour $x \neq 0$

$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$

$\Rightarrow 1-x^2 \le 1+x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1+x^2$

$\Rightarrow 1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$

$\lim_{x\to0}(1-x^2) = \lim_{x\to0}(1+x^2) = 1$

d'où $\lim_{x\to0} f(x) = 1$

3) $f(x) = \frac{1}{x}+\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

* pour $x>0$: $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \ge -1$

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\cos\left(\frac{1}{x}\right) \ge -1+\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) \ge -1+\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0^+}\left(-1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ d'où $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

* pour $x<0$ $\quad \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow f(x) \le 1+\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0^-}\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\infty$ d'où $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

conclusion : f n'admet pas de limite en 0

Oarray.tn-Aqra Blech-Oarray.tn